Correction du DST n°5

Exercice 1

1. (a) f est somme de fonctions dérivables donc est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

donc pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x) \geq 0$. On en conclut que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Comme $f(0) = 0$ on en déduit par croissance de f : $\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \geq 0}$

2. (a) g est somme de fonctions dérivables donc est dérivable sur $[0,+\infty[$ et :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad g'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$$

donc pour tout $x \in [0,+\infty[$, $g'(x) \leq 0$. On en conclut que g est décroissante qur $[0,+\infty[$.

(b) Comme $g(0) = 0$, on en déduit par décroissance de g : $\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) \leq 0}$.

3. D'après la question 1.b) on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \geq 0$ et d'après la question 2.b) on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $u_k \leq \dfrac{1}{2k^2}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{0 \leq u_k \leq \frac{1}{2k^2}}$$

4. D'après la question précédente (u_k) est une suite positive, et comme $2 > 1$ la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente. D'après le théorème de comparaison pour les série positives, $\sum u_k$ converge.

Exercice 2

1. Pour toute matrice X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AX + XA$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc f est à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrons que f est linéaire. Pour toutes matrices $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= A(\lambda X + Y) + (\lambda X + Y)A \\ &= \lambda AX + AY + \lambda XA + YA \\ &= \lambda(AX + XA) + AY + YA \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

donc f est linéaire. C'est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$f(X) = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c-a & d-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ c-d & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b-c & 2b-a-d \\ 2c-a-d & 2d-b-c \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} f(X) = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a-b-c &=& 0 \\ 2b-a-d &=& 0 \\ 2c-a-d &=& 0 \\ 2d-b-c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff a = b = c = d \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)}$$

C'est une droite vectorielle donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1}$.

3. D'après le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right) = 4$$

donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 4 - 1 = 3}$ d'après la question précédente.

4. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
M = f(X) &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha-\beta-\gamma & 2\beta-\alpha-\delta \\ 2\gamma-\alpha-\delta & 2\delta-\beta-\gamma \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha-\beta-\gamma &=& a \\ 2\beta-\alpha-\delta &=& b \\ 2\gamma-\alpha-\delta &=& c \\ 2\delta-\beta-\gamma &=& d \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha-\beta-\gamma &=& a \\ 4\beta-2\alpha-2\delta &=& 2b \\ 4\gamma-2\alpha-2\delta &=& 2c \\ 4\delta-2\beta-2\gamma &=& 2d \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha-\beta-\gamma &=& a \\ 3\beta-\gamma-2\delta &=& a+2b \\ 3\gamma-\beta-2\delta &=& a+2c \\ 4\delta-2\beta-2\gamma &=& 2d \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha-\beta-\gamma &=& a \\ 3\gamma-\beta-2\delta &=& a+2c \\ 8\gamma-8\delta &=& 4a+2b+6c \\ -8\gamma+8\delta &=& -2a-4c+2d \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha-\beta-\gamma &=& a \\ 3\gamma-\beta-2\delta &=& a+2c \\ 8\gamma-8\delta &=& 4a+2b+6c \\ 0 &=& 2a+2b+2c+2d \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'équation de compatibilité est vérifiée si et seulement si $a+b+c+d=0$, donc $\mathrm{Im}(f) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a+b+c+d=0\right\}$.
Comme $a+b+c+d=0 \iff a=-b-c-d$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-c-d & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et comme on sait que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ on peut en conclure que c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(b) En reprenant les équations précédentes, avec $a=1$, $b=-1$, $c=0$ et $d=0$ on trouve $\alpha = \delta + \frac{1}{4}$, $\beta = \delta - \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{2} + \delta$ donc

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\delta & -\frac{1}{4}+\delta \\ \delta+\frac{1}{4} & \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{donc l'ensemble des antécédents de } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ par } f \text{ est } \left\{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \delta \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 3

1. (a) X_1 suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{p}$.
   (b) La probabilité de gagner est $\mathbb{P}(X_1 = 4) = \left(\frac{1}{p}\right)^4$.
2. (a) Si $[X_1 = k]$ est réalisé, alors exactement k roues sont gagnantes et on fait tourner les $4 - k$ autres roues. La probabilité de gagner au deuxième essai est donc $\left(\frac{1}{p}\right)^{4-k}$.
   (b) Notons A l'événement « gagner en exactement deux essais ». D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $[X_1 = k]_{0\leq k\leq 4}$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(A \cap [X_1 = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A) && \text{car } A \cap [X_1 = 4] = \varnothing \\
&= \sum_{k=0}^{3} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{p}\right)^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{4-k} \times \left(\frac{1}{p}\right)^{4-k} \\
&= \frac{1}{p^4} \sum_{k=0}^{3} \binom{4}{k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{4-k} \\
&= \frac{1}{p^4} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{4-k}}_{=\left(1+1-\frac{1}{p}\right)^4} -1 \right) \\
&= \frac{1}{p^4} \left(\left(2 - \frac{1}{p}\right)^4 - 1 \right)
\end{aligned}$$

3. (a) Pour une roue donnée, la probabilité qu'elle n'amène pas le secteur gagnant à un lancer donné est $1 - \frac{1}{p}$. La probabilité qu'elle n'amène aucun secteur gagnant au cours de k essais consécutifs est $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^k$ par indépendance.

   « Amener le secteur gagnant en au plus k essais » est l'événement contraire de « ne jamais amener le secteur gagnant au cours des k premiers essais »

   La probabilité qu'une roue donnée amène le secteur gagnant en au plus k essais est donc $1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k$.
   (b) $(Y \leq n)$ est l'événement « Gagner le jeu en au maximum n essais ». Cet événement est réalisé si l'événement « amener le secteur gagnant en au plus n essais » est réalisé pour les 4 roues. Par indépendance des roues :

$$\mathbb{P}(Y \leq n) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{o}\right)^n\right)^4$$

   (c) Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(Y \leq n) - \mathbb{P}(Y \leq n - 1) \\
&= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)^4 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-1}\right)^4
\end{aligned}$$

   et on peut noter que cette formule est encore valable pour $n = 1$.

Exercice 4

1. A_n est réalisé si et seulement si les deux premières feuilles tirées ne sont pas un original et sa copie. Il y a $\binom{2n}{2} = \dfrac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ façons de choisir deux feuilles dans la boite, et parmi elles il y en a n qui donnent un originl et sa copie. On a donc $\mathbb{P}(\overline{A_n}) = \dfrac{n}{n(2n-1)} = \dfrac{1}{2n-1}$ donc $\boxed{\mathbb{P}(A_n) = 1 - \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{2n-2}{2n-1}}$.

2. (a) Si à l'issue de la première pioche les deux feuilles piochées sont agraphées, alors les deux feuilles restantes sont nécessairement l'autre original et sa copie et la boite sera vidée à la pioche suivante.

   Dans le cas contraire, on revient à la situation initiale.

   Ainsi, l'événement $(T_2 = k)$ est réalisé si et seulement si les $k-2$ premiers tirages donnent deux feuilles qui ne seront pas agraphées ensemble et que le $k-1$-ème tirage donne pour la première fois un original et sa copie.

   La probabilité de ne pas former de couples $k-2$ fois de suite est $(a_2)^{k-2}$ et la probabilité de former ensuite un couple est $(1-a_2)$, d'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(T_2 = k) = (1-a_2)(a_2)^{k-2}}$$

   (b) T_2 est à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ donc $S_2 = T_2 - 1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_2 = k) &= \mathbb{P}(T_2 - 1 = k) \\
&= \mathbb{P}(T_2 = k+1) \\
&= (1-a_2)(a_2)^{k+1-2} \\
&= (1-a_2)(a_2)^{k-1}
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{donc } S_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a_2).}$

   On a d'après le cours : $\mathbb{E}(S_1) = \dfrac{1}{1-a_2}$ et $V(S_1) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}$ donc comme $T_2 = S_2 + 1$:

$$\boxed{\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}(S_2+1) = \mathbb{E}(S_2) + 1 = \frac{2-a_2}{1-a_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(T_2) = V(S_2) = \frac{a_2}{(1-a_2)^2}}$$

3. (a) S'il y a 3 originaux et 3 copies, il faut au moins trois pioches pour vider la boite donc $\boxed{\mathbb{P}(T_3 = 2) = 0}$. De plus, $\mathbb{P}(T_3 = 3)$ si et seulement si chaque pioche amène un original et sa copie. On a donc $\mathbb{P}(T_3 = 3) = \mathbb{P}(\overline{A_3}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_3}}(\overline{A_2})$ car après une première pioche fructueuse on se ramène au cas $n = 2$.

   On a donc $\boxed{\mathbb{P}(T_3 = 3) = (1-a_3)(1-a_2)}$.

   (b) Suivant l'indication de l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}(T_3 = k+1) = \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}_{A_3}(T_3 = k+1) + \mathbb{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)$$

   Si aucun couple n'est formé au premier tirage, l'événement $(T_3 = k+1)$ est réalisé si et seulement si la boite est vidée au bout des k tirages suivants. Cela arrive avec probabilité $\mathbb{P}(T_3 = k)$.

   Si un couple est formé dès le premier tirage, alors l'événement $(T_3 = k+1)$ est réalisé si et seulement si les 2 couples restants sont formés en k tirages. On a finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(T_3 = k+1) = a_3\mathbb{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\mathbb{P}(T_2 = k)}$$

   (c) On raisonne par récurrence sur k :

   - **Initialisation :** Pour $k = 2$ et $k = 3$ l'égalité est vérifiée d'après la question 3.(a).

- **Hérédité :** Supposons l'égalité vraie pour un entier $k \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_3 = k+1) &= (1-a_3)\mathbb{P}(T_2 = k) + a_3\mathbb{P}(T_3 = k) \\
&= (1-a_3)(1-a_2)(a_2)^{k-2} + a_3\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \quad \text{d'après 2.(a) et l'hypothèse de} \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left((a_3-a_2)(a_2)^{k-2} + a_3((a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3(a_2)^{k-2} - (a_2)^{k-1} + (a_3)^{k-1} - a_3(a_2)^{k-2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left((a_3)^{k-1} - (a_2)^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

donc l'égalité est encore vraie au rang $k+1$.

- **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que le résultat est vrai pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

(d) Les séries sont des séries géométriques convergentes car $|a_2| < 1$ et $|a_3| < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}(T_3 = k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}(a_3)^{k-2} - \sum_{k=2}^{+\infty}(a_2)^{k-2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{1}{1-a_3} + \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{1}{1-a_2} \\
&= \frac{1-a_2}{a_3-a_2} - \frac{1-a_3}{a_3-a_2} \\
&= \frac{a_3-a_2}{a_3-a_2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(e) D'après le théorème de transfert, $T_3 - 1$ admet une espérance si et seulement si $\sum(k-1)\mathbb{P}(T_3 = k)$ est absolument convergente.

Or $(k-1)(a_2)^{k-2}$ et $(k-1)(a_3)^{k-2}$ sont les termes généraux de deux séries géométriques dérivées convergentes (via le changement de variable $j = k-1$ qui donne $j(a_2)^{j-1}$ et $j(a_3)^{j-1}$, et car $|a_2| < 1$ et $|a_3| < 1$) donc $T_3 - 1$ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_3 - 1) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)(a_3)^{k-2} - \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)(a_2)^{k-2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}j(a_3)^{j-1} - \sum_{j=1}^{+\infty}j(a_2)^{j-1}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{(1-a_3)^2} - \frac{1}{(1-a_2)^2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{(1-a_2)^2-(1-a_3)^2}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2} \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{(2-a_2-a_3)(a_3-a_2)}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2} \\
&\boxed{= \frac{2-a_2-a_3}{(1-a_3)(1-a_2)}}
\end{aligned}$$

(f) D'après le théorème de transfert, $T_3(T_3-1)$ admet une espérance si et seulement si $\sum k(k-1)\mathbb{P}(T_3=k)$ converge absolument. Or les séries de terme général $k(k-1)(a_2)^{k-2}$ et $k(k-1)(a_3)^{k-2}$ sont des séries géométriques dérivées secondes convergentes car $|a_2|<1$ et $|a_3|<1$. On en déduit que $T_3(T_3-1)$ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_3(T_3-1)) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(a_3)^{k-2} - \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(a_2)^{k-2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{2}{(1-a_3)^3 - \frac{2}{(1-a_2)^3}}\right) \\
&= \frac{2(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{(1-a_2)^3-(1-a_3)^3}{(1-a_3)^3(1-a_3)^3} \\
&= \frac{2}{a_3-a_2} \times \frac{(a_3-a_2)((1-a_2)^2+(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_3))}{(1-a_2)^2(1-a_3)^2} \\
&= \frac{2(1-2a_2+a_2^2+1-a_2-a_3+a_2a_3+1-2a_3+a_3^2)}{(1-a_2)^2(1-a_3)^2} \\
&\boxed{= \frac{6-4a_2-6a_2-6a_3+2a_2a_3+a_2^2+a_3^2}{(1-a_2)^2(1-a_3)^2}}
\end{aligned}$$

Comme $T_3^2 = T_3(T_3-1)+T_3$ et que $T_3(T_3-1)$ et T_3 admettent une espérance on en conclut que T_3^2 admet une espérance, donc T_3 admet un moment d'ordre 2 donc admet une variance (que l'énoncé ne demande pas de calculer).

Exercice 5

1. (a) Comme $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, il suffit de montrer que cette famille est libre.

   Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $a\cdot v_1+b\cdot v_2+c\cdot v_3=(0,0,0)$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& 0 \\ -a-2b &=& 0 \\ b+3c &=& 0 \end{array}\right.$$

   et il en découle (presque) immédiatement que $a=b=c=0$. La famille (v_1,v_2,v_3) est donc bien libre et donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $H=\operatorname{Vect}(v_2-v_1,v_3-v_2)$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'après le cours.

2. (a) Cette famille contient 9 vecteurs !

   - $u_{1,1}=v_1-v_1=(0,0,0)$
   - $u_{1,2}=v_1-v_2=(2,1,-1)$
   - $u_{1,3}=v_1-v_3=(-1,-1,-3)$
   - $u_{2,1}=-u_{1,2}=(-2,-1,1)$
   - $u_{2,2}=v_2-v_2=(0,0,0)$
   - $u_{2,3}=v_2-v_3=(-3,-2,-2)$
   - $u_{3,1}=-u_{1,3}=(1,1,3)$
   - $u_{3,2}=-u_{2,3}=(3,2,2)$
   - $u_{3,3}=v_3-v_3=(0,0,0)$

   (b) Parmi les 9 vecteurs précédents, plusieurs sont liés : $u_{3,1}=-u_{1,3}$, $u_{3,2}=-u_{2,3}$ et $u_{2,1}=-u_{1,2}$. En enlevant aussi les vecteurs nuls on peut donc réécrire :

$$E_3=\operatorname{Vect}(u_{1,2},u_{1,3},u_{2,3})$$

   Ces trois vecteurs ne sont pas libre ! En effet, $u_{2,3}=u_{1,3}-u_{1,2}$ donc finalement $E_3=\operatorname{Vect}(u_{1,2},u_{1,3})$ et ces deux vecteurs forment une famille libre, donc $\dim(E_3)=2$.

3. (a) $w_{i,j}=0 \iff v_i=v_j \iff i=j$ car $(v_1,\ldots,v_n)$ est une base, chaque vecteur apparait donc au plus une fois (sinon elle ne serait pas libre).

   (b) E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\dim(\mathbb{R}^n)=n$ donc $\dim(E)\leq n$.

(c) Supposons que $(a_2,...,a_n)$ sont n réels tels que $a_2w_{1,2}+a_3w_{1,3}+\cdots+a_nw_{1,n}=0$. On a :

$$\sum_{k=2}^{n} a_k(v_1-v_k)=0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right) v_1 - a_2v_2 - a_3v_3 - \cdots - a_nv_n = 0$$

or la famille $(v_1,...,v_n)$ est libre donc $\sum_{k=2}^{n} a_k = a_2 = \cdots = a_n = 0$ et donc $(w_{1,2},...,w_{1,n})$ est bien libre.

(d) Si $i=j$ on a $w_{i,j}=0$. Si $i=1$, alors $w_{i,j}=w_{1,j}$. Dans tous les autres cas : $w_{i,j}=v_i-v_j=v_i-v_1+v_1-v_j=w_{i,1}+w_{1,j}=-w_{1,i}+w_{1,j}$ (avec éventuellement $w_{1,j}=0$ si $j=1$).

(e) On en déduit que tous les vecteurs de la famille $(w_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ sont dans $\operatorname{Vect}(w_{1,2},...,w_{1,n})$ donc que $E=\operatorname{Vect}(w_{1,2},...,w_{1,n})$.

Puisque $(w_{1,2},...,w_{1,n})$ est libre on en conclut que $\dim(E)=n-1$.

4. (a) Pour $a=1$ et $b=0$, la famille $z_{i,j}$ contient tous les vecteurs de la base $(v_1,...,v_n)$ donc F contient $\operatorname{Vect}(v_1,...,v_n)=\mathbb{R}^n$ donc $F=\mathbb{R}^n$.

Pour $a=b=0$ on a $z_{i,j}=0$ pour tout $i\in\{1,...,n\}$ et tout $j\in\{1,...,n\}$ donc $F=\{0\}\neq\mathbb{R}^n$.

(b) $\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, si et seulement si $a^2-b^2\neq 0$ si et seulement si $a^2\neq b^2$.

(c) Si $a^2\neq b^2$, la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ est inversible. Soit $B=\begin{pmatrix} \lambda & \mu\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ son inverse. Comme on a par définition

$$\begin{cases} z_{1,2} &= av_1+bv_2\\ z_{2,1} &= bv_1+av_2\end{cases}$$

A est inversible d'inverse B donc ce système est équivalent à

$$\begin{cases} v_1 &= \lambda z_{1,2}+\mu z_{2,1}\\ v_2 &= \gamma z_{1,2}+\delta z_{2,1}\end{cases}$$

De plus, d'après le cours, $\lambda=\dfrac{a}{a^2-b^2}$ et $\mu=\dfrac{-b}{a^2-b^2}$.

(d) On suppose que $a^2\neq b^2$.

Si $a=0$ ou $b=0$, alors la famille $(z_{i,j})$ contient des multiples non nuls de tous les vecteurs de la base $(v_1,...,v_n)$ donc $F=\mathbb{R}^n$.

Si a et b sont tous deux non nuls, alors d'après la question 5.(c) on a $v_1\in F$, donc pour tout $j\in\{2,...,n\}$ on a $v_j=\frac{1}{b}(z_{1,j}-av_1)$ donc $v_j\in F$. Finalement, F contient tous les vecteurs $v_1,...,v_n$ donc $F=\mathbb{R}^n$.

(e) Si $a^2=b^2$, alors $a=b$ ou $a=-b$. Dans le cas $a=-b$ on se ramène au cas de la question 4 (à une constante multiplicative près) et donc $\dim(F)=n-1$ (donc $F\neq\mathbb{R}^n$).

Dans le cas où $a=b$, si $a=b=0$ on a déjà vu que $F=\{0\}$ et si $a=b\neq 0$ on a $z_{i,i}=2av_i$ pour tout i donc $v_1,...,v_n$ sont dans F, donc $F=\mathbb{R}^n$.

Pour résumer il y a quatre cas :

$a=b=0$	$a^2\neq b^2$	$a=-b$	$a=b\neq 0$
$F=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$	$F=\mathbb{R}^n$	$\dim(F)=n-1$	$F=\mathbb{R}^n$